

1 Probabilidade

Encontramos na natureza dois tipos de fenômenos: determinísticos e aleatórios. Os fenômenos determinísticos são aqueles em que os resultados são sempre os mesmos, qualquer que seja o número de ocorrências verificadas. Como exemplo, há o fato de os quadrados de inteiros ímpares serem ímpares, de a água ferver a 100°C, de a solução de água e sal completarem circuitos elétricos (a solução é condutora de eletricidade), de chapas de ferro ao ar livre enferrujarem (pela combinação do ferro com o oxigênio) etc. Nos fenômenos aleatórios, os resultados não serão previsíveis, mesmo que haja um grande número de repetições do mesmo fenômeno. ¹

1.1 Fenômeno Aleatório

No nosso dia-a-dia, em maior ou menor grau, nos deparamos com o acaso. Por exemplo, da afirmação “é provável que meu time ganhe a partida hoje” pode resultar:

- que, apesar do favoritismo, ele perca;
- que, como pensamos, ele ganhe;
- que empate.

Como vimos, o resultado final depende do acaso. Fenômenos como esse são chamados fenômenos aleatórios ou experimentos aleatórios.

Definição 1.1 *Experimentos ou fenômenos aleatórios são aqueles que, mesmo repetidos várias vezes sob condições semelhantes, apresentam resultados imprevisíveis.* ²

Podemos considerar os experimentos aleatórios como fenômenos produzidos pelo homem.

- Lançamento de uma moeda honesta;
- Lançamento de um dado;
- Lançamento de duas moedas;
- Retirada de uma carta de um baralho completo, de 52 cartas;
- Determinação da vida útil de um componente eletrônico.

A análise desses experimentos revela que:

- a) Cada experimento poderá ser repetido indefinidamente sob as mesmas condições;
- b) De início não sabemos o valor do experimento mas podemos descrever todos os resultados possíveis;
- c) Quando o experimento for repetido um grande número de vezes, surgirá uma regularidade.

Para a explicação desses fenômenos (fenômenos aleatórios), adota-se um modelo matemático probabilístico.

1.2 Espaço Amostral

Um dos conceitos matemáticos fundamentais utilizados no estudo das probabilidades é o de conjunto. Um conjunto é uma coleção de objetos ou itens que possuem pelo menos uma característica em comum. É importante definir cuidadosamente o que constitui o conjunto em que estamos interessados, a fim de podermos decidir se determinado elemento é ou não membro do conjunto.

A probabilidade só tem sentido no contexto de espaço amostral, que é o conjunto de todos os resultados possíveis de um “experimento”. O termo “experimento” sugere a incerteza do resultado antes de fazermos as observações. Ao conjunto desses resultados possíveis damos o nome de espaço amostral ou conjunto universo, representado por Ω .

Exemplos:

¹Milone, G., Estatística Geral e Aplicada. Ed. Cengage Learning.

²Morettin, L.G., Estatística Básica - Probabilidade e Inferência. Ed. Pearson.

i) Lançamento de uma moeda;

$$\text{Resultados possíveis} \begin{cases} \text{cara (c)} \\ \text{coroa (k)} \end{cases} \\ \Omega = \{c, k\}$$

ii) Lançamento de um dado;

$$\text{Resultados possíveis} \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6. \\ \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

1.3 Eventos

Chamamos de evento qualquer subconjunto do espaço amostral Ω de um experimento aleatório. Os eventos, sendo conjuntos, serão representados por letras maiúsculas do nosso alfabeto, enquanto os elementos de um evento serão representados por letras minúsculas.

Exemplo 1.1 Cartas de um baralho

Três cartas são retiradas, sem reposição, de um baralho que tem três cartas de cada uma das cores azul, vermelha, preta e branca. Dê um espaço amostral para esse experimento e liste os eventos:

A : todas as cartas selecionadas são vermelhas;

B : uma carta vermelha, uma carta azul e uma carta preta são selecionadas;

C : três diferentes cores ocorrem;

D : todas as quatro cores ocorrem.

Solução:

Vamos denotar por A ; V ; P e B as cores azul, vermelha, preta e branca, respectivamente. Então

$$\Omega = \{(x_1; x_2; x_3) : x_i = A; V; P; B; i = 1; 2; 3\}.$$

Os eventos são:

$$A = \{(V; V; V)\};$$

$$B = \{(V; A; P); (V; P; A); (A; V; P); (A; P; V); (P; V; A); (P; A; V)\};$$

$$C = \{(V; A; P); (V; P; A); (A; V; P); (A; P; V); (P; V; A); (P; A; V); (V; A; B); (V; B; A); (A; V; B); (A; B; V); (B; V; A); (B; A; V); (V; B; P); (V; P; B); (B; V; P); (B; P; V); (P; V; B); (P; B; V); (B; A; P); (B; P; A); (A; B; P); (A; P; B); (P; B; A); (P; A; B)\}$$

Como temos quatro cores diferentes e apenas três extrações, não é possível obter todas as cores; logo, $D = \emptyset$.

1.3.1 Tipos de Eventos Aleatórios

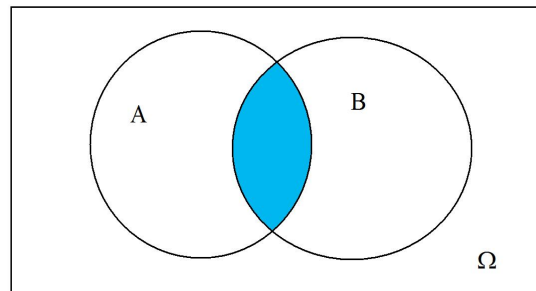
- equiprováveis: aqueles tomados como igualmente possíveis. Exemplo: bolas de uma urna são igualmente possíveis se do mesmo tamanho, formato e peso, se desenvolvidas e convenientemente agitadas antes de cada nova extração. Caso contrário, faz-se de conta que;
- dependentes: quando a ocorrência de um condiciona, depende ou vincula o acontecimento de outro. As condições para tanto são: o espaço amostral modifica-se após cada experimento, ou a ocorrência do segundo evento depende do resultado do primeiro. Exemplos: retirar cartas de um baralho, sem reposição; lançados dois dados, sair o número um em um deles afeta as chances da soma deles ser ímpar;
- independentes: aqueles em que a ocorrência de um não altera a chance de os outros ocorrerem;

1.4 Operações com Eventos Aleatórios

1.4.1 Intersecção

A intersecção de dois eventos A e B corresponde a ocorrência simultânea de A e B (ver Figura 1). Seguindo a notação da teoria de conjuntos, a intersecção de dois eventos será representada por $A \cap B$: Note que: $x \in A \cap B \iff x \in A$ e $x \in B$. Lê-se: “ x pertence a A intersecção B se e somente se x pertence a A e x pertence a B .”

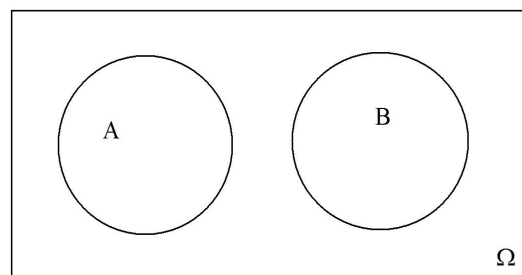
Figura 1: Intersecção de dois eventos: $A \cap B$.



1.4.2 Exclusão

Dois eventos A e B são mutuamente exclusivos quando eles não podem ocorrer simultaneamente, isto é, quando a ocorrência de um impossibilita a ocorrência do outro. Isto significa dizer que os eventos A e B não têm elementos em comum. Então, dois eventos A e B são mutuamente exclusivos quando sua intersecção é o conjunto vazio, isto é, $A \cap B = \emptyset$.

Figura 2: Eventos mutuamente exclusivos, $A \cap B = \emptyset$.

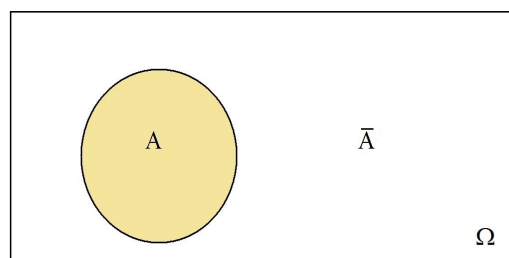


Exemplo: Na extração de uma só carta, os eventos “a carta é de copas” e “a carta é de ouros” são mutuamente exclusivos, porque uma carta não pode ser ao mesmo tempo de copas e de ouros. Já os eventos “a carta é de copas” e “a carta é uma figura” não são mutuamente exclusivos, porque algumas cartas de copas também são figuras.

1.4.3 Complementação de um Evento

O complementar de um evento A , denotado por $\bar{A}$ ou A^c ; é a negação de A . Então, o complementar de A é formado pelos elementos que não pertencem a A (ver Figura 3).

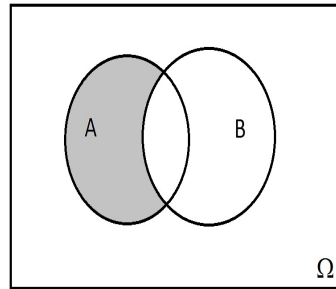
Figura 3: Complementar do evento $A = \bar{A}$.



1.4.4 Diferença

A diferença entre dois eventos A e B , representada por $A \setminus B$ é o evento formado pelos elementos do espaço amostral que pertencem a A mas não pertencem a B (ver Figura 4). Note que podemos pensar em $A \setminus B$ como o complementar de B relativo ao evento A .

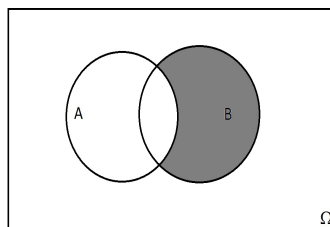
Figura 4: Diferença $A \setminus B$.



Note que: $x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ e } x \notin B \iff x \in A \cap \bar{B}$. Lê-se: “ x pertence a A menos B se e somente se x pertence a A e x não pertence a B se e somente se x pertence a A intersecção B complementar.” Podemos escrever o evento A utilizando a notação de diferença: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

Analogamente, o evento $B \setminus A$ é o evento formado pelos elementos do espaço amostral que pertencem a B mas não pertencem a A (ver Figura 5).

Figura 5: Diferença $B \setminus A$.



1.5 Partição de um espaço amostral

Definição: Dizemos que os eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ formam uma *partição* do espaço amostral Ω se:

- a) $A_i \neq \phi, i = 1, \dots, n$;
- b) $A_i \cap A_j = \phi$, para $i \neq j$;
- c) $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

Exemplo 1.2 No lançamento de um dado honesto, considere os eventos:

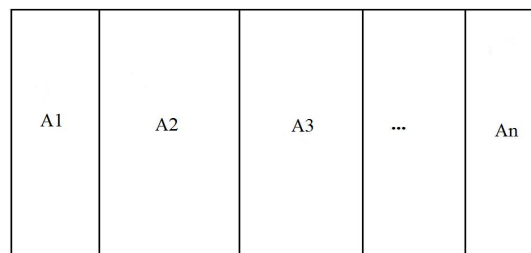
A_1 : Sair face par;

A_2 : Sair face ímpar;

Note que:

- a) $A_1 \neq \phi$ e $A_2 \neq \phi$;
- b) $A_1 \cap A_2 = \phi$;
- c) $A_1 \cup A_2 = \Omega$.

Figura 6: Partição do espaço amostral.



Exercícios 1.1 1. Lançam-se três moedas. Enumerar o espaço amostral e os eventos:

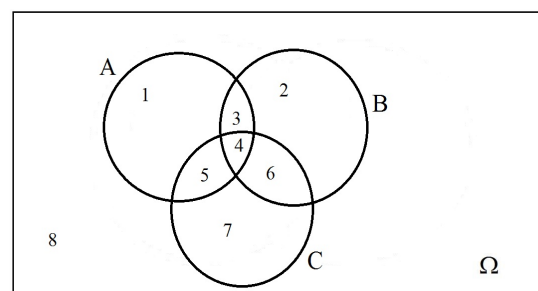
- a) faces iguais;
- b) cara na 1ª moeda;
- c) coroa na 2ª e 3ª moedas.

2. Considere a experiência que consiste em pesquisar famílias com três crianças, em relação ao sexo delas, segundo a ordem do nascimento. Enumerar os eventos:

- a) ocorrência de dois filhos do sexo masculino;
- b) ocorrência de pelo menos um filho do sexo masculino;
- c) ocorrência de no máximo duas crianças do sexo feminino.

3. Considere a Figura 7. Expresse, em notação de conjuntos, os eventos definidos por cada uma das áreas numeradas.

Figura 7: Diagrama de Venn para o exercício 3.



1.6 Definição Frequentista de Probabilidade

Dado um experimento aleatório (ver subseção 1.1), sendo Ω o seu espaço amostral (ver subseção 1.2) e $P(A)$: probabilidade de um evento A, assumindo que Ω é um conjunto equiprovável - todos os elementos de Ω tem a mesma chance de ocorrer - chamamos de **probabilidade** de um evento A ($A \subset \Omega$) o número real $P(A)$, tal que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{Número de casos favoráveis (A)}}{\text{Número total de casos}} \quad (1)$$

Exemplo 1.3 Considerando o lançamento de uma moeda e o evento A “obter cara”, temos:

$$\Omega = \{c, k\} \Rightarrow n(\Omega) = 2$$

$$A = \{c\} \Rightarrow n(A) = 1$$

Logo: $P(A) = \frac{1}{2}$. Esse resultado significa que se lançarmos uma moeda equilibrada, temos 50% de chance que apareça cara na face superior.

1.7 Algumas Propriedades

- a) $0 < P(A) < 1$;
b) $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$;
c) Regra da Adição de probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

onde $P(A \cap B)$ pode ser obtido por: $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$;

- d) Se A e B são eventos **mutuamente exclusivos** ($P(A \cap B) = 0$), a regra da adição se reduz a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- e) $P(A^c) = 1 - P(A)$;

• Leis de Morgan:

- f) $P(A^c \cup B^c) = P[(A \cap B)^c] = 1 - P(A \cap B)$

- g) $P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B)$

Exercício: Na tabela a seguir temos dados referentes a alunos matriculados em três cursos de uma universidade em dado ano.

Tabela 1: Dados referentes a alunos de uma dada universidade.

Cursos	Sexo		Total
	Feminino	Masculino	
Matemática	70	40	110
Estatística	10	20	30
Química	20	10	30
Total	100	70	170

Qual a probabilidade de escolhermos um aluno ao acaso e ele ser:

- a) Homem e da matemática?
b) Homem ou da matemática?
c) Estatística ou Química?

1.8 Probabilidade Condicional e Independência de Eventos

O evento em que ambos, A e B, ocorrem é chamado A interseção B; portanto, a probabilidade do evento A ocorrer, dado que B ocorreu, é de:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0. \quad (2)$$

Isso significa que a probabilidade de A ocorrer, dado que B ocorreu, é igual à probabilidade de ocorrência simultânea de A e B dividida pela probabilidade de ocorrência de B.

Das expressões acima resulta a **regra do produto**, que se refere ao cálculo da probabilidade do evento interseção,

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) \quad (3)$$

A ordem do condicionamento pode ser invertida. Para três eventos, por exemplo, pode-se escrever:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B) \quad (4)$$

Se os eventos A e B forem **independentes**, $P(A|B) = P(A)$, logo

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (5)$$

Sempre que calculamos $P(A|B)$, estamos essencialmente calculando $P(A)$ em relação ao espaço amostral reduzido devido a B ter ocorrido, em lugar de fazê-lo em relação ao espaço amostral original Ω .

Exercícios 1.2 1) Utilizando os dados da Tabela 1 responda:

- a) Um aluno é sorteado ao acaso. Qual a probabilidade de que esteja cursando química, dado que é mulher?
- 2) Uma urna contém 2 bolas verdes e 4 bolas azuis. Tiram-se 2 bolas ao acaso sem reposição. Qual a probabilidade de que as duas bolas:
- a) sejam verdes?
- b) sejam da mesma cor?
- c) sejam de cores diferentes?
- 3) A probabilidade de um gato estar vivo daqui a 5 anos é $\frac{3}{5}$. A probabilidade de um cão estar vivo daqui a 5 anos é $\frac{4}{5}$. Considerando os eventos independentes, a probabilidade de:
- a) somente o cão estar vivo daqui a 5 anos é; Resp: $\frac{8}{25}$
- b) o cão estar vivo e o gato estar vivo. Resp: $\frac{12}{25}$
- 4) Em um lote de 12 peças, 4 são defeituosas. Duas peças são retiradas uma após a outra, sem reposição.
- a) Qual a probabilidade de que ambas sejam boas? R: 0,4242.
- b) Qual a probabilidade de que a 1ª peça seja boa e a 2ª defeituosa? R: 0,2424.
- 5) Um baralho de 52 cartas é subdividido em 4 naipes: copas, espadas, ouros e paus.
- a) Retirando-se uma carta ao acaso, qual a probabilidade de que ela seja de ouros ou de copas? R: 0,5.
- b) Retirando-se duas cartas ao acaso com reposição da 1ª carta, qual a probabilidade de que ser a 1ª de ouros e a 2ª de copas? R: 0,0625.
- c) Recalcular a probabilidade anterior se não houver reposição da 1ª carta. R: 0,0637.
- d) Havendo reposição, qual a probabilidade de sair a 1ª carta de ouros ou então a 2ª de copas? R: $\frac{7}{16}$.

1.9 Árvores de probabilidade

A construção de uma **árvore de probabilidade** fornece uma ferramenta muito útil para a solução de problemas envolvendo duas ou mais etapas. A árvore consiste em uma representação gráfica na qual diversas possibilidades são representadas, juntamente com as respectivas probabilidades condicionadas a cada situação. Isso permite, pela utilização direta da regra do produto das probabilidades, associar a cada nó terminal da árvore a respectiva probabilidade.

O uso das árvores de probabilidade ajudam e simplificam o entendimento da aplicação de dois teoremas que serão apresentados a seguir, conforme será visto nos exercícios.

Exemplo:

Em certo colégio, 5% dos homens e 2% das mulheres têm mais de 1,80m de altura. Por outro lado, 60% dos estudantes são homens. Sorteando-se um estudante aleatoriamente, qual a probabilidade de:

- a) Ser mulher e ter mais de 1,80m?
- b) Ter mais de 1,80m?
- c) Um estudante é escolhido ao acaso e tem mais de 1,80m. Qual a probabilidade de que o estudante seja mulher?

Solução Inicial:

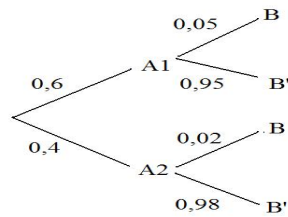
Considere os seguintes eventos:

A_1 : Estudante do sexo masculino; A_2 : Estudante do sexo feminino;

B : Estudante com mais de 1,80m de altura; B' : Estudante com menos de 1,80m de altura;

- Ser mulher (A_2) e ter mais de 1,80m (B)?

$$P(A_2 \cap B) = 0,40 \times 0,02 = 0,008$$



- Ter mais de 1,80m?

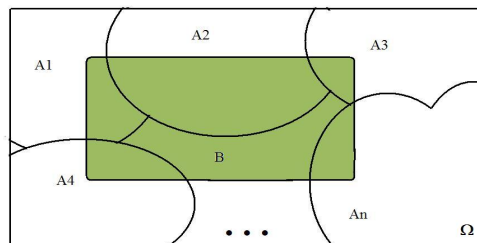
$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_2 \cap B) + P(A_1 \cap B) \\ P(A_1 \cap B) &= 0,60 \times 0,05 = 0,03 \\ P(B) &= 0,008 + 0,03 = 0,038 \end{aligned}$$

- Um estudante é escolhido ao acaso e tem mais de 1,80m. Qual a probabilidade de que o estudante seja mulher?

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{0,008}{0,038} \cong 0,2105.$$

1.10 Teorema da probabilidade total

Seja $A_1, A_2, \dots, A_n$ uma partição e B um evento qualquer de Ω , conforme ilustrado na figura a seguir:



Então

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i) \quad (6)$$

ou

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n) \quad (7)$$

Para dois eventos apenas A_1 e A_2 , temos:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) \quad (8)$$

1.11 Teorema de Bayes

Nas mesmas condições do teorema anterior:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Esse resultado consegue-se facilmente do teorema anterior e demais propriedades. Observe que o denominador de (9) é a própria $P(B)$ calculada pelo teorema da probabilidade total.

Para dois eventos apenas A_1 e A_2 , temos:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)}, \quad (10)$$

Exercícios 1.3 1) Três máquinas, A, B e C produzem respectivamente 40%, 50% e 10% do total de peças de uma fábrica. As porcentagens de peças defeituosas nas respectivas máquinas são 3%, 5% e 2%. Uma peça é sorteada ao acaso e verifica-se que é defeituosa. Qual a probabilidade de que a peça tenha vindo da máquina B? E da máquina A? Resp: B: $\cong 0,641$; A: $\cong 0,31$.

2) Há apenas dois modos de Genésio ir para Genebra participar de um congresso: Avião ou Navio. A probabilidade de Genésio ir de navio é de 40% e de ir de avião 60%. Se ele for de navio, a probabilidade de chegar ao congresso com dois dias de atraso é de 8,5%. Se ele for de avião a probabilidade cai para 1%. Sabe-se que Genésio chegou com dois dias de atraso para participar do congresso em Genebra. A probabilidade de ele ter ido de avião é: Resp: 0,15.

1.12 Exercícios

1. Sejam A e B dois eventos em um dado espaço amostral, tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0,5$, $P(A \cap B) = 0,1$. Determine o valor de p.

2. Se $P(A) = 1/2$ e $P(B) = 1/4$ e A e B são eventos mutuamente exclusivos, calcule:

(a) $P(A^c)$ (b) $P(B^c)$ (c) $P(A \cap B)$ (d) $P(A|B)$

3. Um geólogo diz que existe uma probabilidade 0,8 de ter petróleo numa certa região, além disso se nessa terra existe petróleo a probabilidade na primeira perfuração de sair petróleo é 0,5. Qual é a probabilidade de ter petróleo se na primeira perfuração não se encontrou petróleo?

4. Carlos chega atrasado à universidade 25% das vezes, e esquece o material da aula 20% das vezes. Admitindo que essas ocorrências sejam independentes, determine a probabilidade de Carlos:

a) chegar atrasado 2 dias seguidos; b) chegar atrasado e sem o material de aula;
c) chegar na hora e com o material de aula; d) chegar na hora e sem o material de aula.

5. Um grupo de 60 pessoas apresenta a seguinte composição:

Uma pessoa é escolhida ao acaso. Pergunta-se:

Condição	Número de pessoas		
	Homens	Mulheres	TOTAL
Menores	15	17	32
Adultos	18	10	28
TOTAL	33	27	60

a) qual a probabilidade de ser homem?

b) qual a probabilidade de ser adulto?

c) qual a probabilidade de ser menor e ser mulher?

d) sabendo-se que a pessoa escolhida é adulto, qual a probabilidade de ser homem?

e) dado que a escolhida é mulher, qual a probabilidade de ser menor?

6. Paulo e Roberto foram indicados para participarem de um torneio de basquete. A probabilidade de Paulo ser escolhido para participar do torneio é $3/5$. A probabilidade de Roberto ser escolhido para participar do mesmo torneio é $1/5$. Sabendo que a escolha de um deles é independente da escolha do outro, a probabilidade de somente Paulo ser escolhido para participar do torneio é igual a: a) $4/5$ b) $10/25$ c) $12/25$ d) $3/5$ e) $4/5$

7. Um sistema automático de alarme contra incêndio utiliza três células sensíveis ao calor que agem independentemente uma das outras. Cada célula entra em funcionamento com probabilidade 0,8 quando a temperatura atinge 60°C . Se pelo menos uma das células entrar em funcionamento, o alarme soa. Calcular a probabilidade do alarme soar quando a temperatura atingir 60° .

8. Carlos diariamente almoça um prato de sopa no mesmo restaurante. A sopa é feita de forma aleatória por um dos três cozinheiros que lá trabalham: 40% das vezes a sopa é feita por João; 40% das vezes por José, e 20% das vezes por Maria. João salga demais a sopa 10% das vezes; José o faz em 5% das vezes, e Maria 20% das vezes. Como de costume, um dia qualquer Carlos pede a sopa e, ao experimentá-la, verifica que está salgada demais. Qual a probabilidade de que essa sopa tenha sido feita por José?

9. André está realizando um teste de múltipla escolha, em que cada questão apresenta 5 alternativas, sendo uma e apenas uma correta. Se André sabe resolver a questão, ele marca a resposta certa. Se ele não sabe, ele marca aleatoriamente uma das alternativas. André sabe 60% das questões do teste.

i) Então, a probabilidade de ele acertar uma questão qualquer do teste (isto é, de uma questão escolhida ao acaso) é igual a:

ii) Se para uma dada questão ele dá a resposta certa, qual é a probabilidade de que ele conhecia a pergunta?

10. A probabilidade de haver atraso no voo diário que leva a mala postal a certa cidade é 0,2. A probabilidade de haver atraso na distribuição local da correspondência é 0,15 se não houver atraso no voo e 0,25 se houver atraso no voo.

a) Qual a probabilidade de a correspondência ser distribuída com atraso em certo dia?

b) Se em certo dia a correspondência foi distribuída com atraso, qual a probabilidade de que tenha havido atraso no voo?

c) Qual a probabilidade de que tenha havido atraso no voo se a correspondência não foi distribuída em atraso?

11. Um meteorologista acerta 80% dos dias em que chove e 90% dos dias que faz bom tempo. Chove em 10% dos dias. Tendo havido previsão de chuva, qual a probabilidade de chover?

12. Dados dois eventos A e B associados a um mesmo espaço amostral mostre que

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

13. Dados dois eventos A e B associados a um mesmo espaço amostral e P uma probabilidade definida nos eventos de Ω , então:

$$P\{(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\} = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

14. Uma mensagem é codificada em código binário, consistindo de dois símbolos: 0 (zero) e 1 (um). As probabilidades de transmissão dos 2 símbolos são 0,45 e 0,55 respectivamente. No canal os símbolos 0 são distorcidos em 1 com probabilidade 0,2 e os símbolos 1 são distorcidos em 0 com probabilidade 0,1. Ache a probabilidade de que tendo recebido:

a) um 0 ele não seja distorcido;

b) um 1 ele não seja distorcido;

15. Considere dois lançamentos de um dado equilibrado (honesto). Determine a probabilidade condicional de se obter a face 2 no primeiro lançamento, dada a informação de que a soma dos resultados foi 7.

16. Cacá e Ronaldinho estão machucados e talvez não possam defender o Brasil em sua próxima partida contra a Argentina. A probabilidade de Cacá jogar é 40%, e a de Ronaldinho, 70%. Com ambos os jogadores, o Brasil terá 60% de probabilidade de vitória; sem nenhum deles, 30%; com Cacá mas sem Ronaldinho, 50%, e com Ronaldinho mas sem Cacá, 40%. Qual é a probabilidade de o Brasil ganhar a partida?

17. Para casais que moram em uma dada região de Cuiabá, a probabilidade do marido estar satisfeito com o prefeito atual é de 21%, a probabilidade da esposa estar satisfeita com o prefeito atual é de 28% e a probabilidade de que ambos, esposa e o marido estejam satisfeitos é de 15%. Determine:

a) O espaço amostral;

b) Pelo menos um membro do casal estar satisfeito com o prefeito atual;

c) Nenhum dos membros do casal estar satisfeito com o prefeito atual;

d) A esposa estar satisfeita, dado que o marido está satisfeito com o prefeito atual.

18. Uma classe de estatística teve a seguinte distribuição das notas finais: 4 do sexo masculino e 6 do feminino foram reprovados, 8 do sexo masculino e 14 do feminino foram aprovados. Para um aluno sorteado dessa classe, denote por M se o aluno escolhido for do sexo masculino e por A se o aluno foi aprovado. Calcule:

- a) $P(A \cup M^c)$;
- b) $P(A^c \cap M^c)$;
- c) $P(A|M)$;
- d) $P(M^c|A)$;
- e) $P(M|A)$.

19. Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. Considere que 20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada, 30% das mulheres escolhem carne, 75% dos fregueses são homens e os seguintes eventos:

H: freguês é homem; M: freguês é mulher;
A: freguês prefere salada; B: freguês prefere carne;
Calcular:

- a) $P(H)$, $P(A|H)$, $P(B|M)$;
- b) $P(A \cap H)$, $P(A \cup H)$;
- c) $P(M|A)$;

20. Você entrega a seu amigo uma carta, destinada à/ao sua/seu namorada(o), para ser colocada no correio. Entretanto, ele pode se esquecer com probabilidade 0,1. Se não se esquecer, a probabilidade de que o correio extravia a carta é de 0,1. Finalmente, se foi enviada pelo correio a probabilidade de que a/o namorada(o) não a receba (por outros motivos) é de 0,1.

- a) Sua/seu namorada(o) não recebeu a carta. Qual a probabilidade de seu amigo ter esquecido de colocar a carta no correio?
- b) Avalie as possibilidades de esse namoro continuar, se a comunicação depender das cartas enviadas.

Dica: Utilize os conceitos de probabilidade condicional, probabilidade total, e o teorema de Bayes.